24/04/2018

Θεωρούμε το Π.Α.Τ $u'(t) = F(t,u(t))$, $u(t_0) = x_0$ όπου F είναι συνεχής στο $\omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τις εξής ποσότητες:

$$T^- := \inf\{t : \text{το Π.Α.Τ έχει λύση στο } [t,t_0]\}$$
$$T^+ := \sup\{t : \text{το Π.Α.Τ έχει λύση στο } [t_0,t]\}.$$

Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται μία λύση στο (T^-,T^+) η οποία είναι μη επεκτάσιμη και το διάστημα (T^-,T^+) είναι το διάστημα ορισμού της.

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Συμπεριφορά μιας μη επεκτάσιμης λύσης στα άκρα του διαστήματος ύπαρξης)

Υποθέτουμε ότι η F είναι ορισμένη και συνεχής στο ανοικτό $\omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Επιπλέον $u=u(t)$ μια μη επεκτάσιμη λύση της ορισμένη στο (T^-,T^+) με $t_0\in(T^-,T^+)$. Τότε οποιοδήποτε οριακό σημείο του συνόλου $\{(t,u(t))\}$ όταν $t\to T^-$ ή όταν $t\to T^+$ είναι είτε άπειρο είτε σημείο του συνόρου του ω.

NO.

Date

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

<u>1η περίπτωση</u>: $T^- = -\infty$ ή $T^+ = +\infty$

<u>2η περίπτωση</u>: $T^+ = +\infty$ και $-\infty < T^-$ και u μη φραγμένη όταν $t \to T^-$

<u>3η περίπτωση</u>: $T^- = -\infty$ και $T^+ < \infty$ και u μη φραγμένη όταν $t \to T^+$

<u>4η περίπτωση</u>: $-\infty < T^-$ και $T^+ < \infty$ και u μη φραγμένη όταν $t \to T^-$ και $t \to T^+$

<u>5η περίπτωση</u>: $-\infty < T^-$ και u φραγμένη όταν $t \to T^-$

<u>6η περίπτωση</u>: $T^+ < \infty$ και u φραγμένη όταν $t \to T^+$

Έστω $(t_\omega)_\omega$ ακολουθία του (T^-, T^+) και $t \to T^+$ και υποθέτουμε επίσης ότι $\lim\limits_{\omega} (t_\omega, u(t_\omega))$ υπάρχει (είτε πεπερασμένο είτε άπειρο).

<u>1η περίπτωση</u>: Εάν $T^+ = +\infty$ τότε $t_\omega \to \infty$ και συνεπώς $(t_\omega, u(t_\omega)) \to \infty$

όπου $(x_n, y_n) \to \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0): \|(x_n, y_n)\| > \varepsilon$

όμως $\|(x_n, y_n)\| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$

Έτσι, $\|(t_\omega, u(t_\omega))\| = \sqrt{t_\omega^2 + u(t_\omega)^2} = |t_\omega + u(t_\omega)| \leq |t_\omega| + |u(t_\omega)| \leq |t_\omega| + \|u(t_\omega)\|$

$\Rightarrow \|(t_\omega, u(t_\omega))\| \leq |t_\omega| + \|u(t_\omega)\|$

(Όμοια για $T^- = -\infty$ και $t_\omega \to T^-$ συνεπώς $(t_\omega, u(t_\omega)) \to +\infty$)

<u>2η περίπτωση</u>: Εάν $T^+ = +\infty$ και $t_\omega \to T^+$ συνεπώς $(t_\omega, u(t_\omega)) \to \infty$

Εάν $T^- > -\infty$ και $\|u(t_\omega)\| \to +\infty$ συνεπώς $(t_\omega, u(t_\omega)) \to \infty$

(όμοια για την 3η περίπτωση και 4η περίπτωση)

<u>5η περίπτωση</u>: Εάν $T^+ < \infty$ και $t_\omega \to T^+$ και $u(t_\omega) \to R \in \mathbb{R}^n$

Θ.ν.δ.ο. το (T^+, R) ανήκει στο σύνορο του ω $(\partial\omega)$

Εφόσον $(t_\omega, u(t_\omega)) \in \omega$ για όλα τα ω προκύπτει ότι $(T^+, R) \in \bar{\omega}$

Θ.ν.δ.ο. $(T^+, R) \in \partial\omega$

Έστω ότι $(T^+, R) \notin \partial\omega$ και $(T^+, R) \in \omega$ άρα

Γνωρίζω ότι ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Άρα $\exists K$ συμπαγές τέτοιο ώστε $(T^+, R) \in K \subseteq \omega$. Ας είναι ακόμη t_ω αύξουσα και επειδή $\lim\limits_{\omega} (t_\omega, u(t_\omega)) = (T^+, R) \in K$ έπεται ότι τελικά η ακολουθία είναι μέσα στο σύνολο $K \subseteq \omega$. Άρα, $((t_\omega, u(t_\omega))) \in K$ $\forall \omega \in \mathbb{N}$

Ισχυρίζομαι ότι $t_\omega < \tau_\omega < t_{\omega+1}$ και $(\tau_\omega, u(\tau_\omega)) \in \partial K$

Πράγματι, γιατί αν δεν συνέβαινε αυτό τότε αυτά τα ω θα ήταν περιορισμένα και ανεξάρτητα κατά μέτρο θα είχα ότι $(t, u(t)) \in K$ $\forall t \in [T^* - b, T^*)$, $b>0$

άρα θα υπάρχουν a, b τέτοια ώστε $\underbrace{K_{a,b}(T^*, R)}_{\text{περιοχή}} \subseteq \omega$. Τότε το Π.Α.Τ

$u'(t) = F(t, u(t))$, $u(T^*) = R$ θα έχει μια λύση u η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $[T^* - a, T^* + a]$ για κάποιο $a>0$. Άτοπο αφού T^* δεξιότερο άκρο ύπαρξης της λύσης.

Άρα υπάρχουν σημεία ω και τ_ω που ικανοποιούν την $(\tau_\omega, u(\tau_\omega)) \in \partial K$

Ας είναι τ_ω το μικρότερο τέτοιο στοιχείο $\in (t_\omega, t_{\omega+1})$. Τότε

$$\|u(t_\omega) - u(\tau_\omega)\| = \left| u(\cancel{t_0}) + \int_{t_0}^{t_\omega} F(s, u(s))\,ds - u(\cancel{t_0}) - \int_{t_0}^{\tau_\omega} F(s, u(s))\,ds \right| =$$

$$= \left\| \int_{\tau_\omega}^{t_\omega} F(s, u(s))\,ds \right|$$

Όμως F είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $K \Rightarrow F$ φραγμένη.

Ας είναι ένα άνω φράγμα το M.

$$\Rightarrow \|u(t_\omega) - u(\tau_\omega)\| \le \int_{\tau_\omega}^{t_\omega} M\,ds = M(t_\omega - \tau_\omega)$$

άρα

$$\rho\big((t_\omega, u(t_\omega)), (\tau_\omega, u(\tau_\omega))\big) = \sqrt{(t_\omega - \tau_\omega)^2 + (u(t_\omega) - u(\tau_\omega))^2}$$

ισχύει και $\lim_\omega (\tau_\omega, u(\tau_\omega)) = (T^*, R) \in \partial K$ αφού το $(\tau_\omega, u(\tau_\omega)) \in \partial K$

άτοπο! αφού υποθέσαμε ότι $(T^*, R) \notin \partial K$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Υποθέτουμε ότι F είναι φραγμένη και συνεχής στο ανοιχτό $\omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Έστω επίσης D ένα συμπαγές υποσύνολο του ω και $(t_0, x_0) \in D^\circ \subseteq \omega$. Τότε για κάθε λύση u (μη επεκτάσιμη) του Π.Α.Τ $u'(t) = F(t, u(t))$, $u(t_0) = x_0$ υπάρχει $\hat{t}$ τέτοιο ώστε $(\hat{t}, u(\hat{t})) \in \omega \setminus D$. Το πόρισμα προκύπτει λόγω του ότι D συμπαγές και ω^c κλειστό (αφού ω ανοιχτό) και $D \cap \omega^c = \emptyset$.

$\Rightarrow d(D, \omega^c) = \inf_{(x,y) \in D \times \omega^c} |x - y| = \varepsilon > 0$. Όμως συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα

Date

$\exists\, t_\omega \to T^+$ και $(t_\omega, u(t_\omega)) = (T^+, R) \in \partial\omega = \bar{\omega} \cap \overline{\omega^c} = \partial\omega^c \subseteq \omega^c$

(↳ διότι ω^c κλειστό)

Άρα $\exists\, \omega_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|(t_\omega, u(t_\omega)) - (T^+, R)| < \varepsilon \;\; \forall\, \omega \geq \omega_0$

Άρα για $x = (t_{\omega_0}, u(t_{\omega_0})) \Rightarrow |x - y| < \varepsilon$

Δηλαδή, $(t_{\omega_0}, u(t_{\omega_0})) \in \omega \cap D$

⨳

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ:

Έστω $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$

- συζυγής πίνακας του A: $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$
- ανάστροφος πίνακας του A: A^T (οι γραμμές γίνονται στήλες $A \cdot A^T = I$)
- άθροισμα δύο πινάκων A, B: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
- πολλαπλασιασμός δύο πινάκων A, B: $AB = (A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times m} \Rightarrow AB) = \Gamma^{m \times k} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$
- πολλαπλασιασμός πίνακα με ένα σταθερό λ: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$
- ο μηδενικός πίνακας θα συμβολίζεται : $O = (a_{ij} = 0)$
- ο μοναδιαίος πίνακας θα συμβολίζεται: I_n: στην κύρια διαγώνιο $= 1$ και μηδέν αλλού.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

(1) $I_n \cdot A = A = A \cdot I_n$

(2) αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ij} ή συμπαράγοντας του a_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, όπου: M_{ij} := υποορίζουσα του πίνακα A.

(π.χ) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$M_{11} = a_{22}$ άρα $A_{11} = (-1)^2 a_{22} = a_{22}$

Συμπέρασμα: $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$

(3) άνω τριγωνικός ⇔ όλα τα στοιχεία κάτω από την διαγώνιο είναι μηδέν

(4) $|AB| = |A| \cdot |B|$ όπου $A, B \in K^{n \times n}$

(5) $|A| = 0 \Rightarrow A$ ιδιάζων πίνακας

(6) $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ → έχει στοιχεία τους συμπαράγοντες.

(7) $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(A)}{|A|}$, $A^{-1}A = I_n = A \cdot A^{-1}$ (A^{-1} αντίστροφος του A)

$|A| \neq 0$

(8) $|A^{-1} \cdot A| = |I| \Rightarrow |A^{-1}| \cdot |A| = I \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

(9) $\operatorname{adj}(A) \cdot A = |A| = A \cdot \operatorname{adj}(A)$ (πολλαπλασιάζω την (7) με A)

(10) χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A: $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^n + c_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$
εάν $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ιδιοτιμές του πίνακα A, άρα $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Cayley-Hamilton):
Κάθε $n \times n$ πίνακας A μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο με την έννοια ότι $p_A(K) = 0$

Θα λέμε ότι ο πίνακας $A^{n \times n}$ είναι όμοιος με έναν πίνακα B εάν υπάρχει ένας πίνακας Γ με $\det\Gamma \neq 0$ τέτοιο ώστε $A = \Gamma B \Gamma^{-1}$

Έστω A, B όμοιοι πίνακες τότε:

(1) $\det A = \det B$

↳ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\det(A) = \det(\Gamma B \Gamma^{-1}) = \det\Gamma \det B \det\Gamma^{-1} = \det\Gamma \cdot \det\Gamma^{-1} \cdot \det B =$
$= \det(\Gamma\Gamma^{-1}) \det B \Rightarrow \det(A) = \det(\Gamma\Gamma^{-1}) \det(B) = \det(I) \det(B) = \det B$

NO.

Date

(2) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

↳ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** $P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = |TBT^{-1} - \lambda I| = |TBT^{-1} - \lambda TT^{-1}| = |TBT^{-1} - T\lambda T^{-1}| =$

$= |T| \cdot |BT^{-1} - \lambda T^{-1}| = |T| \cdot |B - \lambda| \cdot |T^{-1}| = |T| \cdot |B - \lambda I| \cdot |T^{-1}| =$

$= |B - \lambda I| = P_B(\lambda)$

(3) οι ιδιοτιμές των $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$ είναι ίσες οπού $tr(A) = tr(B)$